ESERCIZI

1. *Vettori linearmente dipendenti/indipendenti*

E1 – Dati i vettori dello spazio vettoriale R3(R), stabilire se essi sono L.D. o L.I.

Soluzione

I tre vettori sono L.D. se

(Sistema omogeneo di 3 equazioni in 3 incognite)

Poiché il determinante dei coefficienti

dello spazio vettoriale R3(R) sono L.D.

Un metodo alternativo per stabilire la L.D./L.I. di più vettori è il seguente

Scritta la matrice A avente per colonne le componenti dei vettori, si può affermare che:

1. Se rang(A) = n (numero dei vettori), allora gli n vettori sono L.I.;
2. Se rang(A) < n, allora gli n vettori sono L.D.

In particolare, è il rango r della matrice A che fornisce il numero di vettori L.I. che sono quelli le cui componenti hanno fornito il rango della matrice A.

In questo esempio, poiché

E2 - Dati i vettori dello spazio vettoriale R3(R), stabilire se essi sono L.D. o L.I.

Soluzione

Sia la matrice avente per colonne le componenti dei tre vettori.

Calcoliamo il rango di A:

E3 - Dati i vettori dello spazio vettoriale R4(R), stabilire se essi sono L.D. o L.I.

Soluzione

Sia la matrice avente per colonne le componenti dei tre vettori.

Calcoliamo il rango di A:

Poiché il rango di A è r = 2, con r < n = 3, i tre vettori sono L.D.

Due sono i vettori L.I.: .

1. *Spazi vettoriali generati da un sistema di vettori*

E4 – Calcolare il sottospazio vettoriale U di R3 generato dai vettori

Soluzione

Dunque:

Calcolare il sottospazio vettoriale U di R3 generato dai vettori

Soluzione

Dunque:

E6 – Dato il sottospazio vettoriale di R4(R) così definito

calcolare:

1. un sistema di generatori di U;
2. una base e la dimensione di U.

Soluzione

1. Poiché il rango della matrice è r = 2 = n, i due vettori sono L.I.

Dunque,

è una base di U e dim (U) = 2.